

任意の位相空間のStone-Čechコンパクト化の5つの方法

Tychonoff性を仮定しない任意の位相空間 X に対しても、Stone-Čechコンパクト化 βX は構成可能であり、コンパクトHausdorff空間 (compact Hausdorff space) の圏 **CHaus** から位相空間 (topological space) の圏 **Top** への包含関手あるいは忘却関手 (forgetful functor) $U : \mathbf{CHaus} \rightarrow \mathbf{Top}$ に対する左随伴 (left adjoint) を与えます。

1. 基礎概念と普遍性・関手性の証明

基本定義

- 位相空間 (topological space):** 集合 X とその上の開集合系からなる組。圏論的には、対象を位相空間、射を連続写像とする圏 **Top** をなします。
- コンパクトHausdorff空間 (compact Hausdorff space):** 任意の開被覆が有限部分被覆を持ち（コンパクト）、かつ任意の異なる2点が互いに素な開集合で分離できる（Hausdorff）位相空間。これらは圏 **CHaus** をなします。
- 忘却関手 (forgetful functor):** $U : \mathbf{CHaus} \rightarrow \mathbf{Top}$ は、コンパクトHausdorff空間を単なる位相空間とみなし、連続写像をそのまま連続写像とする関手です。

随伴 (adjunction) と普遍性 (universal property)

位相空間 X に対して、あるコンパクトHausdorff空間 βX と連続写像 $c_X : X \rightarrow \beta X$ の組が U の**左随伴 (left adjoint)** を与えるとは、以下の普遍性を満たすことです。

普遍性: 任意の $K \in \mathbf{CHaus}$ と任意の連続写像 $f : X \rightarrow K$ に対し、 $\tilde{f} \circ c_X = f$ を満たす連続写像 $\tilde{f} : \beta X \rightarrow K$ が一意に存在する。

関手性 (functoriality) の証明

この普遍性のみから、 β が単なる対象の対応ではなく、関手 $\beta : \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{CHaus}$ となることが完全に証明できます。

- 射の対応:** 任意の位相空間の間の連続写像 $g : X \rightarrow Y$ が与えられたとします。合成写像 $c_Y \circ g : X \rightarrow \beta Y$ を考えます。 $\beta Y \in \mathbf{CHaus}$ であるため、 X における普遍性から、

$(\beta g) \circ c_X = c_Y \circ g$ を満たす連続写像 $\beta g : \beta X \rightarrow \beta Y$ が一意に存在します。これが射 g に対する関手 β の値です。

2. **恒等射の保存:** X 上の恒等写像 $\text{id}_X : X \rightarrow X$ を考えます。 $\beta(\text{id}_X) \circ c_X = c_X \circ \text{id}_X = c_X$ を満たします。一方で、 βX 上の恒等写像 $\text{id}_{\beta X}$ も $\text{id}_{\beta X} \circ c_X = c_X$ を満たします。普遍性における一意性より、 $\beta(\text{id}_X) = \text{id}_{\beta X}$ です。

3. **合成の保存:** $g : X \rightarrow Y$ と $h : Y \rightarrow Z$ を考えます。

$\beta(h \circ g) \circ c_X = c_Z \circ (h \circ g) = (c_Z \circ h) \circ g = (\beta h \circ c_Y) \circ g = \beta h \circ (\beta g \circ c_X) = (\beta h \circ \beta g) \circ c_X$ となります。一意性より、 $\beta(h \circ g) = \beta h \circ \beta g$ が成り立ちます。

2. Gelfand双対 (Gelfand duality) の詳細

定義と構成

- **可換C*環 (commutative C*-algebra):** 複素数体 \mathbb{C} 上のBanach環 A であり、対合 (involution) $*$: $A \rightarrow A$ を持ち、 $\|a^*a\| = \|a\|^2$ (C*条件) および $ab = ba$ (可換性) を満たすもの。ここでは単位元 1 を持つとします。
- **スペクトル (spectrum) / 指標空間 (character space):** A から \mathbb{C} への非ゼロな環準同型 (指標) 全体の集合を $\Delta(A)$ と書きます。指標は自動的にノルム 1 の連続線形汎関数になります。 $\Delta(A)$ に弱*位相 (weak-* topology) (すなわち、各 $a \in A$ に対する評価写像 $\phi \mapsto \phi(a)$ が全て連続となる最弱の位相) を入れると、Banach-Alaogluの定理より $\Delta(A)$ はコンパクトHausdorff空間になります。

Gelfand表現 (Gelfand representation) と圏同値の証明

任意の $a \in A$ に対し、関数 $\hat{a} : \Delta(A) \rightarrow \mathbb{C}$ を $\hat{a}(\phi) = \phi(a)$ で定義します。Gelfand-Naimarkの定理は、写像 $\Gamma : A \rightarrow C(\Delta(A), \mathbb{C}), a \mapsto \hat{a}$ が、等長的な*-環同型 (isometric *-isomorphism) になることを主張します。

反変圏同値 (contravariant equivalence) の証明:

C*Alg を単位的可換C*環の圏とします。

1. 関手 $C : \mathbf{CHaus} \rightarrow \mathbf{C*Alg}^{op}$ は、空間 K に $C(K, \mathbb{C})$ を対応させます。
2. 関手 $\Delta : \mathbf{C*Alg}^{op} \rightarrow \mathbf{CHaus}$ は、環 A に $\Delta(A)$ を対応させます。
3. 任意の $A \in \mathbf{C*Alg}$ に対して、 $A \cong C(\Delta(A), \mathbb{C})$ となることはGelfand-Naimarkの定理そのものです。
4. 任意の $K \in \mathbf{CHaus}$ に対して、 $K \cong \Delta(C(K, \mathbb{C}))$ を示します。各 $x \in K$ に対して評価写像 $\delta_x(f) = f(x)$ は指標を与えます。Urysohnの補題により $C(K, \mathbb{C})$ は K の点を分離するため $x \mapsto \delta_x$ は単射です。また、極大イデアルの性質から可換C*環の任意の指標はある点の評価写像 δ_x と一致するため全射でもあり、同相写像となります。

3. Stone-Čechコンパクト化の5つの構成法 (詳細拡充版)

任意の位相空間 X に対する βX の5つの構成法と、その普遍性の構成的な証明の詳細です。

1. 直積空間への写像の像の閉包

構成の詳細: 閉区間 $I = [0, 1]$ とし、 X 上のすべての連続関数からなる集合を $C(X, I)$ とします。直積位相空間 $I^{C(X, I)}$ は、Tychonoffの定理によりコンパクトHausdorff空間です。評価写像 $c_X : X \rightarrow I^{C(X, I)}$ を、 $x \in X$ に対してその第 f 座標が $f(x)$ となるような写像、すなわち $c_X(x) = (f(x))_{f \in C(X, I)}$ と定義します。 βX をこの像の閉包 $\overline{c_X(X)}$ と定義します。閉部分集合であるため βX 自身もコンパクトHausdorffです。

普遍性の証明: $K \in \mathbf{CHaus}$ と連続写像 $f : X \rightarrow K$ をとります。 K も完全規則空間 (completely regular space) であるため、評価写像 $e_K : K \rightarrow I^{C(K, I)}$ は位相的な埋め込み (topological embedding) となります。

f は関数の引き戻し $f^* : C(K, I) \rightarrow C(X, I)$ を $g \mapsto g \circ f$ によって定めます。この f^* は、直積空間の間の射影を組み替える連続写像 $\Pi : I^{C(X, I)} \rightarrow I^{C(K, I)}$ を誘導します。具体的には、 $\mathbf{y} \in I^{C(X, I)}$ に対して、 $\Pi(\mathbf{y})$ の第 g 座標を $\mathbf{y}_{g \circ f}$ と定義します。

このとき任意の $x \in X$ について、 $(\Pi(c_X(x)))_g = (c_X(x))_{g \circ f} = g(f(x)) = (e_K(f(x)))_g$ となるため、 $\Pi \circ c_X = e_K \circ f$ が成り立ちます。

Π は連続なので、像の閉包をとることで

$\Pi(\beta X) = \Pi(\overline{c_X(X)}) \subset \overline{\Pi(c_X(X))} = \overline{e_K(f(X))} \subset e_K(K)$ を得ます。 e_K は K とその像の間の同相を与えるため、 $\tilde{f} = e_K^{-1} \circ \Pi|_{\beta X}$ が求める一意な拡張となります。

2. C^* 環のGelfand双対 (Gelfand dual)

構成の詳細: X 上の有界な複素数値連続関数全体のなす C^* 環を $A = C_b(X, \mathbb{C})$ とします。そのスペクトル (指標空間) に弱*位相を入れたものを $\beta X := \Delta(A)$ と定めます。単位的 C^* 環のスペクトルはコンパクトHausdorffです。自然な写像 $c_X : X \rightarrow \beta X$ は $c_X(x) = \delta_x$ ($f \mapsto f(x)$ なる評価写像) で与えられます。

普遍性の証明: $f : X \rightarrow K$ は C^* 環の単位的準同型 $f^* : C(K, \mathbb{C}) \rightarrow A$ を $g \mapsto g \circ f$ で誘導します。第2節で証明したGelfand双対の反変関手性より、環準同型 f^* は指標空間の間の連続写像 $(f^*)^* : \Delta(A) \rightarrow \Delta(C(K, \mathbb{C}))$ を $\phi \mapsto \phi \circ f^*$ によって誘導します。

圏同値性により $K \cong \Delta(C(K, \mathbb{C}))$ であり、同相写像 $\delta_K : K \rightarrow \Delta(C(K, \mathbb{C}))$ の逆写像を用いて $\tilde{f} = \delta_K^{-1} \circ (f^*)^*$ と定義します。これが $\tilde{f} \circ c_X = f$ を満たすことは定義より直ちに確認でき、関手性より一意に定まります。

3. 実数値関数環の極大イデアル空間 (maximal ideal space)

構成の詳細: X 上の有界実数値連続関数環を $R = C_b(X, \mathbb{R})$ とします。 R のすべての極大イデアルからなる集合を $\text{MaxSpec}(R)$ とします。ここにハル・カーネル位相 (hull-kernel topology) を入れます。部分集合 $S \subset \text{MaxSpec}(R)$ の閉包を $\overline{S} = \{M \in \text{MaxSpec}(R) \mid \bigcap_{N \in S} N \subset M\}$ で定義します。この位相空間を βX とし、 $c_X(x) = \{g \in R \mid g(x) = 0\}$ とします。Urysohnの補題に依存する議論により、これはコンパクトHausdorff空間になります。

普遍性の証明: K はコンパクトHausdorffであるため、 $C(K, \mathbb{R})$ の任意の極大イデアルは、ある一点 $y \in K$ で消える関数の集合 $M_y = \{h \in C(K, \mathbb{R}) \mid h(y) = 0\}$ の形をしています。 $f: X \rightarrow K$ が与えられたとき、 f は環準同型 $f^*: C(K, \mathbb{R}) \rightarrow R$ を誘導します。任意の $M \in \beta X$ に対して、その引き戻し $(f^*)^{-1}(M)$ は $C(K, \mathbb{R})$ の極大イデアルになります。したがって、ただ一つの $y \in K$ が存在して $(f^*)^{-1}(M) = M_y$ となります。この対応 $M \mapsto y$ を $\tilde{f}(M)$ と定義します。ハル・カーネル位相の閉包の定義からこれが連続写像になることが示されます。

4. z-超フィルター (z-ultrafilter)

構成の詳細: 連続関数 $g \in C(X, \mathbb{R})$ に対し、 $Z(g) = \{x \in X \mid g(x) = 0\}$ をゼロ集合 (zero-set) と呼びます。ゼロ集合全体 $Z(X)$ 上のフィルターのうち、包含関係に関して極大なものを z-超フィルターと呼びます。 βX を z-超フィルター全体の集合とします。

任意の $Z \in Z(X)$ に対し、 $Z^* = \{p \in \beta X \mid Z \in p\}$ を閉基 (closed base) と定めた位相を入れます (すなわち Z^* たちの有限和の任意の共通部分を閉集合とします)。Alexanderの準基底定理などを用いることで βX のコンパクト性が証明されます。 $c_X(x) = \{Z \in Z(X) \mid x \in Z\}$ は点 x に固定された z-超フィルターです。

普遍性の証明: 連続写像 $f: X \rightarrow K$ と z-超フィルター $p \in \beta X$ が与えられたとします。 p の要素であるゼロ集合 Z たちの f による像 $f(Z)$ を考えます。 p は有限交叉性 (finite intersection property) を持つため、族 $\{f(Z) \mid Z \in p\}$ も K において有限交叉性を持ちます。 K はコンパクトであるため、その閉包の共通部分 $\bigcap_{Z \in p} \overline{f(Z)}$ は空ではありません。さらに p は極大 (超フィルター) であり、 K はHausdorff (点を分離する) であるため、この共通部分はただ1つの点 $\{y\}$ に収束します。この極限 y を $\tilde{f}(p)$ と定義します。フィルターの極限の性質から \tilde{f} の連続性と一意性が保証されます。

5. 随伴関手定理 (Adjoint Functor Theorem)

構成の詳細: Freydの随伴関手定理を用いて、具体的な空間の内部構造に立ち入らずに左随伴の存在を証明します。関手 $U: \mathbf{CHaus} \rightarrow \mathbf{Top}$ は以下の条件を満たします。

解集合条件 (Solution Set Condition) の確認:

- CHaus の完備性:** 直積と等化子 (equalizer) を持つため、すべての小極限 (small limits) を持ちます。
- 極限の保存:** コンパクトHausdorff空間の極限の位相は、 \mathbf{Top} における極限の位相と一致するた

め、 U は極限を保存します。

3. **解集合条件:** 任意の位相空間 X に対し、連続写像 $f: X \rightarrow K$ ($K \in \mathbf{CHaus}$) を考えます。像 $f(X)$ の閉包 $K' = \overline{f(X)} \subset K$ はそれ自身コンパクトHausdorffです。 $f(X)$ は K' で稠密であり、連続関数は稠密部分集合上の値で決定されるため、 K' のウェイト（開基の最小濃度）は高々 $2^{|X|}$ に抑えられ、したがって K' の濃度は $|K'| \leq 2^{2^{|X|}}$ で上から抑えられます。

この濃度制限を満たすコンパクトHausdorff空間の同型類は真のクラス (proper class) ではなく「集合 (set)」をなします。この代表系を $\{K_i\}_{i \in I}$ とすれば、任意の $f: X \rightarrow K$ はある K_i を経由して分解できるため、解集合条件が満たされます。

随伴関手定理により、 U の左随伴関手 $\beta: \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{CHaus}$ の存在がただちに従います。

4. 空間の性質に応じた具体例

Tychonoff空間 (c_X が埋め込みになる) とそうでない空間で、 βX の振る舞いは劇的に異なります。

例1: 非コンパクトなTychonoff空間 ($X = \mathbb{R}$)

$X = \mathbb{R}$ (通常の位相) はTychonoff空間なので $\mathbb{R} \subset \beta\mathbb{R}$ とみなせます。

- **特徴:** $\beta\mathbb{R}$ は極めて巨大な空間です。 \mathbb{R} 上の $\sin(x)$ のような振動する有界連続関数も $\beta\mathbb{R}$ 上で連続に拡張されなければなりません。その結果、余剰部分 (コロナ (corona) $\beta\mathbb{R} \setminus \mathbb{R}$ は $x \rightarrow \infty$ と $x \rightarrow -\infty$ に対応する2つの連結成分に分かれますが、各成分は非常に複雑で、弧状連結 (path-connected) でさえありません。

例2: 非Hausdorffな空間 (シエルピンスキー空間 (Sierpiński space))

$X = \{0, 1\}$ で、開集合が $\emptyset, \{1\}, \{0, 1\}$ のみを考えます。

- **連続写像の性質:** コンパクトHausdorff空間 K への連続写像 $f: X \rightarrow K$ を考えます。 K は T_1 空間なので各点は閉集合です。もし $f(0) \neq f(1)$ なら、 K 内の閉集合 $\{f(0)\}$ の引き戻しは X の閉集合である必要があります。しかし X の閉集合は $\emptyset, \{0\}, \{0, 1\}$ であり、 $\{0\}$ は閉集合ですが $\{1\}$ は閉集合ではありません。この非対称性から、 f は定数関数にならざるを得ません。
- **結論:** 有界実数値連続関数は定数関数しか存在しません。構成法1によれば評価写像は $c_X(0) = c_X(1)$ となり、像は一点に潰れます。したがって $\beta X = \{*\}$ (一点空間) になります。

例3: 非Tychonoffな空間 (補有限位相 (cofinite topology))

$X = \mathbb{N}$ に補有限位相 (有限集合の補集合と空集合のみが開集合) を入れます。

- **特徴:** この空間は T_1 ですが Hausdorff ではありません (任意の2つの空でない開集合は必ず交わるため)。
- **連続写像の性質:** Hausdorff空間 K への連続写像 $f: X \rightarrow K$ を考えます。もし f の像が異なる2

点を含むなら、 K 内で分離する互いに素な開集合の引き戻しが X 内の互いに素な空でない開集合となり、補有限位相の性質に矛盾します。したがって f は定数関数のみです。

- **結論:** 構成法2の $C_b(X, \mathbb{C})$ は定数関数のみからなる1次元の C^* 環 \mathbb{C} と同型になります。そのスペクトルは一点です。ゆえに $\beta X = \{*\}$ となります。

例4: 非コンパクトな順序数空間 ($X = \omega_1$)

最初の非可算順序数 ω_1 (順序位相を入れたもの) を考えます。

- **特徴:** Tychonoff空間ですがコンパクトではありません。しかし、任意の有界実数値連続関数 $f: \omega_1 \rightarrow \mathbb{R}$ は、ある順序数 $\alpha < \omega_1$ 以上の区間で**定数**になるという著しい性質があります。
- **結論:** $\beta\omega_1$ は単に一点 (ω_1 自身) を付け加えた空間 $\omega_1 + 1$ と同相になります。これはAlexandroffの1点コンパクト化 (one-point compactification) とStone-Čechコンパクト化が一致する稀有な例です。